ERROR EN GÖDEL

HELIOS PAZOS

INTRODUCCION

Resumimos a continuación el origen y la peripecia de la objeción que formulamos relativa al teorema de incompletitud de 1931 de Kurt Gödel (no al teorema sino a Gödel).

Agregamos una versión en inglés con posibles errores de lenguaje, a efectos de facilitar la difusión y el acceso a ella.

Suponemos que el provenir de un Ingeniero Civil y no de un lógico o matemático no es ajeno a la falta de respuestas obtenidas.

Tropezamos con un sencillo problema, "El botín", en el No 10 (mayo 1981) de la revista Humor y Juegos y aplicando las elementales reglas de lógica lo resolvimos del modo previsto por ella. Luego una visión global del mismo mostró que la solución hallada era inequívocamente errada.

Fue una sorpresa encontrar que el mismo fácil y distraído error aparecía en las explicaciones de Kurt Gödel previas a su teorema de incompletitud, evaluando como verdadera una sentencia que a todas luces lo parece pero no lo es. Aunque el error se produce fuera del teorema, cambia su sentido al no ser verdadera la sentencia que afirma ser indeducible.

No es evidente ni obvio cual es el error de razonamiento, de modo que al hallarlo fue comunicado a la publicación citada y explicitado en la Revista de Ingeniería N^{0} 1 de 1989.

En una feliz ocasión de encontrarnos en España con Jesús Mosterín, traductor y compilador de la obra de Gödel, afirmó que no podía existir el error detectado, y manifestó (con una cierta molestia) que Gödel había sido objetado por varios motivos, pero nunca por el señalado en este trabajo. Eso resultó alentador, ya que si el argumento hubiera sido expuesto, seguramente ya habría sido refutado o aprobado.

En 1992 se presentó el análisis de esta situación bajo el título "Indecidibilidad en lenguaje natural- De Epiménides a Gödel", en el VIII Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales organizado en la Universidad de Gerona por la Universidad de Barcelona, donde fue aceptado y publicado (Carlos Martín Vide, Editor). A dicho Congreso fue invitado el Prof. Francisco Rodríguez Consuegra (Departamento de Lógica - Facultad de Filosofía - Univ. de Barcelona) para disertar en un Seminario sobre las consecuencias filosóficas del teorema de Gödel (Matemática y Filosofía: El caso de Kurt Godel) *. Se le mostró el trabajo aclarando que se ignoraba si el error detectado era trascendente o irrelevante, ante lo cual manifestó que si el análisis era correcto las consecuencias eran catastróficas, y pidió dos días para estudiarlo. Al cabo de ese lapso dijo que no encontraba ninguna incorrección en lo expuesto, pero se negaba a creer que Gödel se hubiera equivocado, y ofreció un plazo mayor para expedirse o rectificarse, cosa que nunca ocurrió.

Se consultó al Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería y en dos ocasiones al Departamento de Lógica de la Facultad de Humanidades (ambas de la UdelaR) sin obtener ninguna respuesta. El mismo resultado se obtuvo con varias revistas de Lógica.

En 1995 se presentó este análisis a Noam Chomsky, quien opinó a priori que no podía ser correcto y sugirió consultar al entonces Presidente de la Association for Simbolic Logic, quien luego de estudiarlo manifestó: "No me parece convincente", sin señalar ningún error.

Creíamos ingenuamente a Hans C. Andersen al contarnos que bastaba que un niño señalara "El Rey está desnudo" para que ello fuera compartido por todos. En este caso lo cuestionado no es obvio, pero por su índole creemos que vale la pena analizarlo, y esto es una invitación a recorrer ese camino, aunque no sepamos hasta donde puede conducirnos.

* Carlos A. Cardona, Universidad de Bogotá: " *... ha sido especialmente relevante la publicación de algunos escritos inéditos de Gödel a cargo del profesor Rodríguez Consuegra.*"

INDECIDIBILIDAD EN LENGUAJE NATURAL

DE EPIMÉNIDES A GÖDEL *

RESUMEN

A partir del análisis lógico de un problema en apariencia sencillo, pero que no lo es en absoluto, se obtiene una solución muy simple y convincente a la paradoja del mentiroso y se pone de manifiesto un error en la exposición de Gödel previa a su teorema de incompletitud.

Destacamos tres puntos del presente artículo:

- Existen en lenguaje natural sentencias y/o seudo-sentencias no universalmente calificables de verdaderas o falsas (Ej. : Todos los jueves son amarillos). Cuando ese carácter no es evidente o no tenemos las herramientas de análisis adecuadas, pueden ingresar a un texto de apariencia lógica.

- La paradoja del mentiroso surge si cometemos el error de tratar la afirmación de Epiménides como calificable de verdadera o falsa, cuando en realidad no lo es. Aceptar que la proposición es “Verdadera o Falsa“ conduce no sólo a un conflicto teórico sino a flagrantes contradicciones con la realidad.

- Gödel afirma, previo a su teorema de incompletitud, que una determinada sentencia indecidible es verdadera (lo cual le confiere especial sentido al hecho de ser indecidible). El análisis muestra que dicha sentencia no es verdadera.

Keywords: Gödel, Godel, indecidibilidad, recursividad, Epimenides
2000 Mathematics Subject Classification: 03B65 - Logic of natural languages

* Actas del
VIII CONGRESO DE LENGUAJES NATURALES Y LENGUAJES FORMALES
Universidad de Barcelona 1992. Martín Vide, Ed.

INDECIDIBILIDAD EN LENGUAJE NATURAL DE EPIMÉNIDES A GÖDEL

1 - LENGUAJE

El lenguaje, maravillosa herramienta de creación, de comunicación, (¿de confusión?), de pensamiento y de evolución no ha cesado de sorprendernos desde el Cratilo de Platón. [7]

En general no ha existido conciencia (y hoy a menudo olvidamos) que los lenguajes naturales se resisten con frecuente éxito a cualquier intento de encasillar sus contenidos.

Hasta que en la década de 1960 los investigadores en Inteligencia Artificial se abocaron a los problemas de tratamiento del lenguaje y tropezaron en la operativa concreta con las dificultades de orden semántico y pragmático de los significados abiertos, existía la ilusión de que esos temas eran fácilmente resolubles.

2 - PROPOSICIONES CALIFICABLES DE VERDADERAS O FALSAS

Veremos que el análisis de las condiciones en que una proposición formulada en lenguaje natural es Calificable de Verdadera **o** Falsa no es obvio.

La aplicación de ese análisis es una de las vías que nos llevarán a objetar la afirmación hecha por Gödel en la explicación previa a su teorema de incompletud *[1], donde deduce que una sentencia indecidible es verdadera.

Señalemos que el teorema ha sido objetado por varios motivos, pero nunca *[2] por afirmar (previo a su demostración), que es verdadera esta sentencia indecidible (que como veremos, no es en absoluto verdadera).

La sentencia citada tiene gran similitud con la paradoja de Epiménides. Dice de ella J. Mosterín:

> "*Bordeando la paradoja del mentiroso, pero sin caer en ella (la sentencia ϕ* ***es*** *a la vez* ***verdadera*** *e indeducible, y en ello no hay paradoja alguna, aunque si sorpresa)…*" - J. Mosterín [1; 48]

---

*1 En lo que sigue optaremos por el término "incompletitud" para referirnos a lo que en el texto citado de Gödel [1] se designa como "incompletud".

*2 Confirmado por Jesús Mosterín, compilador y traductor de Gödel

En ninguno de los dos casos la afirmación es Calificable de Verdadera **o** Falsa; y aunque a priori lo parezca, la sentencia ϕ citada no es verdadera.

Ambas proposiciones han sido tratadas como Calificables de Verdaderas o Falsas, la de Epiménides y la de Gödel, que además ha sido aceptada como verdadera.

3 - MARCO LÓGICO

Encontramos el concepto de verdadero en un delicado punto de articulación entre la sintáctica y la semántica, desde verdadero en un sistema formal en el cual es derivable de las premisas básicas (válido, analítico, demostrable, [2; 216]) hasta verdadero por la concordancia atribuida a una proposición en lenguaje natural con una cierta realidad (Ej. : Afuera llueve).

Calificar algo de verdadero implica el acuerdo con determinadas reglas de un sistema específico dentro del cual es entonces válida la calificación. Sin embargo cuando afirmemos aquí que una proposición (o seudo-proposición) es **N**o Calificable de Verdadera o Falsa, aunque se llegue a eso por consideraciones sintácticas, ello implica la atribución de una falta de sentido que la invalida para una calificación similar en cualquier sistema lógico y no sólo en uno específico.

Cuando digamos entonces No Calificable de Verdadera o Falsa esto implica no sólo adhesión a la lógica binaria Aristotélica, sino que pretende ser válido en otros sistemas, y mantendremos la designación "No Calificable VoF" para señalar que "El dulce de leche es dodecafónico" no es, en la lógica trivalente aymará, Calificable ni de Verdadero ni de Falso ni de Incierto. Tampoco tiene sentido en la "Lógica de lo probable" de Hans Reichenbach, que atribuye al valor "verdad" de una proposición un valor entre cero y uno, asignarle una medida al valor verdad o a la probabilidad de ser cierta esa sentencia (o conjunto de signos que parece tal), y entonces tampoco en ella es Calificable su Valor de Verdad.

En resumen, "No Calificable de Verdadera **o** Falsa" implica una descalificación y la atribución de falta de sentido tanto en su "interpretación natural" en el ámbito informal de lo que llamamos "sentido común" como en los dominios formales de los sistemas lógicos que utilicemos.

4 - MARCO FORMAL

Aunque sabemos que los lenguajes naturales tienen una fluidez y flexibilidad que no los hacen los más adecuados para un análisis riguroso, los dos casos que nos ocupan (Epiménides y Gödel) están formulados en ellos.

4.1 - La afirmación cuestionada de Gödel se expresa en la introducción y enunciado previo al desarrollo de su Teorema de Incompletitud (al cual le da especial sentido) y se produce fuera de todo sistema formal:

> "*De la observación de que [R(q);q] dice de sí misma que no es deducible se sigue inmediatamente que [R(q);q] es verdadera, pues [R(q);q] no es deducible (ya que no es decidible). La sentencia indecidible en el sistema PM ha sido, pues, finalmente decidida mediante consideraciones metamatemáticas. El análisis preciso de esta extraña situación conduce a resultados sorprendentes...*". Gödel [1;59]

Esta afirmación, hecha en lenguaje natural, nunca ha sido cuestionada (J. Mosterín, ver pag. 2).

4.2 - El otro caso, la antinomia del mentiroso, formulada también en lenguaje natural, ha sido exorcizada de diversas maneras:

- Gödel: *...pero "afirmación falsa en L" no puede expresarse en L, de modo que su afirmación estaba en otro lenguaje y por lo tanto desaparece la paradoja...* [1;173]
- R. Carnap: [2;213]
- P. Watzlawic: *... La paradoja surge debido a la autorreflexividad de la afirmación, es decir, por una confusión entre miembro y clase... ... Epiménides viola por lo tanto el axioma central de la teoría de los tipos lógicos, es decir, que cuanto comprende a toda una colección (clase) no puede ser un miembro de la colección.* [4;91]

Veremos que el problema puede resolverse de modo simple y radical dentro del lenguaje natural y fuera de sistemas formales.

En lo que sigue, pues, no estaremos sujetos a ningún ámbito formalizado específico.

5 - CONDICIONES EN QUE UNA PROPOSICIÓN ES CALIFICABLE DE VERDADERA O FALSA

Carnap estableció en su "Sintaxis lógica del lenguaje" la manera de construir la sintaxis de un lenguaje formalizado, incluyendo la necesidad de definir la noción de "expresión bien formada", es decir, enunciar las reglas de formación.

Tarski, también para lenguajes formalizados, describió como construir una semántica y dar una definición rigurosa de la noción semántica de verdad, consecuencia lógica, validez.

Ambos fueron escépticos al considerar la posibilidad de extender a los lenguajes naturales la aplicación de los métodos que habían creado.

Se ha sostenido que no existe diferencia teórica importante entre lenguaje formal y natural – Montague [5]. Pero junto al problema planteado por D. Davidson:

> *Todo sujeto hablante reconoce como perteneciente a su léxico un número finito de palabras y sabe aplicar un número finito de reglas de formación. ¿Cómo es capaz, en estas condiciones, de reconocer el carácter "bien formado", "gramatical" o "con sentido" de un número infinito de frases?*
> – Davidson [6]

sigue por muchos motivos vigente la afirmación de Carnap:

> *La sintaxis gramatical de un lenguaje natural no es capaz de realizar la tarea de eliminar todos los casos de combinaciones de palabras que resultan sin sentido.* Carnap [3;13]

Al explicitar cuales son las condiciones para que una sentencia formulada en lenguaje natural sea en algún contexto **C**alificable de **V**erdadera **o** **F**alsa, debemos mantener como requisitos básicos previos, como mínimo, los siguientes:

A - Identificación inequívoca de los sujetos a los cuales nos referimos.

B - Identificación inequívoca de lo atribuido a esos sujetos.

C - Posibilidad de coherencia entre sujetos y atributos.

Esto no implica unicidad en el análisis que determine o separe los términos de la proposición.

En: 2 + 3 = 5

- El sujeto puede ser 2 y la propiedad, que sumándole 3 se obtiene 5.
- Los sujetos pueden ser (2 + 3) y (5) y la propiedad el tener valores iguales.
- El sujeto puede ser 2 + 3 = 5 y la propiedad el ser una igualdad válida, etc.

Si existe por lo menos una forma de describir o analizar la sentencia de modo tal que cumpla las tres condiciones, entonces existe una **C**alificación de **V**erdadera **o** **F**alsa que tiene sentido.

Si ningún análisis de la sentencia le permite cumplir con las tres condiciones señaladas, no existe una Calificación de Verdadera o Falsa que tenga sentido y la proposición (o seudo-proposición) es No Calificable de Verdadera o Falsa.

6 - UNA PROPOSICIÓN NO CALIFICABLE DE VERDADERA O FALSA

6.1 - Supongamos que existe en correspondencia con una cierta realidad física la situación siguiente:

6.1.1 - Hay dos cofres numerados 1 y 2.
6.1.2 - Uno de los cofres contiene un botín.
6.1.3 - Cada cofre tiene un cartel con una sentencia sobre cuya veracidad no nos responsabilizamos.
6.1.4 – La Nº1 dice "El botín está en este cofre"
La Nº2 dice "Sólo uno de los carteles es cierto"

6.2 - Dado que ambas sentencias parecen calificables VoF supongamos que lo son. Tendremos en ese caso:

6.2.1 - **Si** la sentencia **Nº2 es Verdadera**, se cumple "sólo una es cierta, **entonces** la sentencia **Nº1 es Falsa**.
6.2.2 - **Si** la sentencia **Nº2 es Falsa**, la Nº1 no puede ser Verdadera, pues en ese caso tendríamos sólo una cierta y la Nº2 sería Verdadera, contrariamente a lo supuesto. **Entonces** la sentencia **Nº1 es Falsa**.
6.2.3 - Como en ambos casos la Nº1 es Falsa (“El botín está en este cofre”) el botín está en el cofre Nº 2.

6.3 - Podemos señalar que inequívocamente esta solución al problema de la ubicación del botín es incorrecta por la siguiente consideración externa respecto a sintáctica, semántica y el precedente análisis:

Alguien puede tomar la situación descrita en **6.1** y replantear el problema previo cambiar el botín de cofre, lo cual no viola ninguno de los puntos 6.1.1 a 6.1.4 del planteo, que siguen formalmente idénticos y tan vigentes como antes.

Como para estas dos situaciones distintas tenemos una sola descripción (formalmente idéntica) es obvio a priori que ningún razonamiento sobre los carteles puede identificar los contenidos.

Lo supuesto en 6.2 es por lo tanto incorrecto. Aceptar que la sentencia Nº2 es "Verdadera o Falsa" conduce a flagrante contradicción con la realidad.

6.4 - Observemos por otra parte que en 6.2.1 a 6.2.2 si la sentencia Nº2 es Calificable de Verdadera o Falsa entonces la Nº1, cuyo contenido no fue allí considerado, es Falsa independientemente de lo que exprese, lo cual es absurdo.

Si consideramos la Nº2 ("Sólo uno de los carteles es cierto") como Calificable de Verdadera o Falsa y la Nº1 fuera verdadera, como por ejemplo "2 + 2 = 4", entonces la Nº2 no puede ser Verdadera ("solo uno es cierto" sería Falso pues habría dos ciertos), ni puede ser Falsa ("solo uno es cierto" sería Verdadero).

En resumen, si suponemos la Nº2 como Calificable de Verdadera o Falsa, lo cual significa que es Verdadera o es Falsa, entonces concluimos que no es Verdadera ni es Falsa, <u>no es por lo tanto Calificable de Verdadera o Falsa.</u> (Supongamos que la Nº2 es Calificable de Verdadera o Falsa, o bien que ella es No Calificable de Verdadera o Falsa, en ambos casos resulta No Calificable de Verdadera o Falsa.)

Consideraciones de concordancia con la realidad (6.3) o de índole lógica (6.4) nos llevan a concluir que <u>la sentencia Nº2 es No Calificable de Verdadera o Falsa.</u>

7 - EPIMÉNIDES

Como nos resulta cómodo y entrañable poder Calificar de Verdadera o Falsa a sentencias que parecen calificables como tales, sólo aceptaremos la conclusión anterior si nos convencemos que la sentencia descalificada es una seudo-sentencia, o viola algo más próximo que una compleja formalización. Felizmente ocurre eso, la descalificada no cumple siquiera los requisitos mínimos establecidos en 5-A y 5-B.

Cabe agregar que Calificable de Verdadero o Falso no es un distintivo gratuito aplicable a todo, sino a algo que esperamos tenga algún sentido. Tal vez "El dulce de leche es dodecafónico" encuentre algún sentido en un ámbito gastronómico, musical o surrealista, pero el análisis nos va a demostrar que dentro de lo que llamamos "sentido común" no existe ningún significado coherente atribuible a "Esta sentencia es falsa", o "Esta proposición es indecidible".

Si la sentencia Nº1 del ejemplo anterior es Verdadera, la Nº2 ("Sólo una es cierta") significa "Esta sentencia es Falsa", lo cual nos coloca directamente en la paradoja del mentiroso.

Tomemos entonces a la paradoja de Epiménides en la forma que la encontramos en el ejemplo analizado:

Nº2: La sentencia Nº2 es Falsa

Si explicitamos sustituyendo "La sentencia Nº2" por la expresión completa de la segunda sentencia obtenemos:

"La sentencia Nº2 es Falsa" es Falsa

lo que (en general) equivale a decir:

La sentencia Nº2 no es Falsa

Veamos que nos exigen los requisitos 5-A y 5-B. Nuestro sujeto sería la sentencia Nº2 y el atributo la falsedad.

Con la primera sustitución de equivalentes (o presuntos equivalentes, si fuera inequívoca la identificación del sujeto), nuestro sujeto cambió, o cambió lo que le atribuimos. Si seguimos sustituyendo "La sentencia Nº 2" por su expresión completa, aquello que parecía claramente identificado saltará alternativamente a lugares opuestos. Esta frase que cambia de "es Falsa" a "no es Falsa" no cumple lo antes establecido.

El tratar la afirmación de Epiménides como Verdadera o Falsa (o sea Calificable de Verdadera o Falsa) nos conduce a la paradoja de concluir que es falsa si la suponemos verdadera y viceversa.

Esta contradicción es similar a la que se produciría si tratáramos la afirmación de Epiménides como si fuera positiva o negativa (calificable >0 ó <0, suposición que violaría 5-C) y pudiéramos concluir que es negativa si la suponemos positiva y viceversa. Esto no constituiría una real paradoja, sería un erróneo juego de aplicación de calificaciones mal o no definidas.

La paradoja se produce al atribuirle erróneamente el valor de Verdadero o de Falso a una sentencia que como vimos en el punto 6 no es Calificable de Verdadera o Falsa.

Independientemente de no tener sentido, lo que dice Epiménides no es Calificable de Verdadero o Falso; no es Verdadero y no es Falso.

8 – GÖDEL

Kurt Gödel demostró en 1931 que todos los sistemas formales con cierto contenido aritmético son incompletos (puede construirse en ellos una sentencia tal que ni ella ni su negación son deducibles en el sistema).

Para ello construyó efectivamente una sentencia con esas características, y mediante consideraciones metamatemáticas exteriores al sistema concluyó (fuera del sistema formal) que esa sentencia era verdadera.

Quedó entonces demostrada la incompletitud de los sistemas formales, ya que podían contener una proposición (verdadera) que en el sistema no podía ser calificada de verdadera ni de falsa.

Pero la sentencia que Gödel afirma que es verdadera (fuera del sistema formal) no lo es en absoluto. Tampoco es falsa, no es calificable de verdadera o falsa ni dentro del sistema formal (lo prueba Gödel) ni en "su interpretación natural".

El resultado que el propio Gödel califica de sorprendente deja entonces de serlo.

Aunque el teorema sea inobjetable sintácticamente, su significado aparece como: "Si en un sistema formal logramos construir una sentencia tan incoherente que sea a priori no calificable de verdadera o falsa, tampoco podremos decidir si es verdadera o falsa dentro de los límites de ese sistema"

La afirmación que la sentencia es verdadera (lo cual le da un especial significado al hecho de que el sistema formal no pueda decidir si es verdadera o falsa) se produce en la presentación informal previa a la demostración y fuera de todo sistema formal. Dice Gödel:

> ***"Así pues, tenemos ante nosotros una sentencia que afirma su propia indeducibilidad. Frente a lo que podría parecer, un tal enunciado no tiene nada de circular, pues se limita a afirmar que una fórmula determinada (a saber, la obtenida mediante cierta sustitución a partir de la fórmula q-ava según el orden lexicográfico) no es deducible. Sólo posteriormente (y por así decir, por casualidad) resulta que esta fórmula es precisamente aquella que expresa ese mismo enunciado".*** Gödel [1;58]

Parece obvio que las sentencias:

Nº 1: La sentencia Nº n es indeducible
Nº 2: La sentencia Nº n es falsa

no tienen un status uniforme en todos los valores de n; e independientemente de si fue la casualidad quien condujo al valor que las vuelve circulares, éste exige un tratamiento particular, entre otras cosas para determinar si tiene sentido. (Hemos visto en el segundo caso que no lo tiene).

El delicado punto cuestionado es expresado así por Gödel:

> ***"De la observación de que [R(q);q] dice de sí misma que no es deducible se sigue inmediatamente que [R(q);q] es verdadera, pues [R(q);q] no es deducible (ya que no es decidible). La sentencia indecidible en el sistema PM ha sido, pues, finalmente decidida mediante consideraciones metamatemáticas."*** Gödel [1;59]

Decimos punto delicado entre otras cosas porque parece evidente que una sentencia que afirma su indeducibilidad, si es indeducible, entonces es verdadera. Fue evidente para Gödel y parece evidente para nosotros. Aún viendo que no cumple los requisitos expresados antes para ser **C**alificable de **V**erdadera **o** **F**alsa, parece evidente que es verdadera.

Felizmente la razón es coherente, y como ha sucedido con tantas cosas evidentes que se demostraron erradas y sustituido por algo más profundamente armonioso, de lo anterior no se infiere que la sentencia sea verdadera.

Es una esperable convergencia que no sea Verdadera una proposición que no es **C**alificable de **V**erdadera **o** **F**alsa, pero como no existe el hábito de establecer si esa calificación corresponde (y nos cuesta convencernos de que eso es suficiente), veámoslo de otras maneras.

8.1 - La tesis que parecía evidente es:

"Esta Proposición es Indeducible" (**Esta P es I**)
si es Indeducible, entonces es Verdadera.

Tratemos de explicitar sustituyendo sucesivamente "Esta P…" por la expresión completa de la proposición y numeremos para identificar de que estamos hablando:

K0	Esta P			
K1	Esta P es I	K0 es I		
K2	"Esta P es I" es I	K1 es I	"K0 es I" es I	
K3	"(Esta P es I) es I" es I	K2 es I	"K1 es I" es I	"(K0..

8.1.1 - La tesis 8.1 y lo que dice Gödel es, literalmente:

Si K1 es I entonces K1 es Verdadera

8.1.2 - K1 es I es lo que afirma K2, de modo que lo anterior equivale a:
Si K2 es V entonces K1 es V

8.1.3 - No sólo nada autoriza a afirmar que si una expresión es Verdadera entonces lo es la anterior, sino que (independientemente de que puedan tener algún sentido o sean **N**o **C**alificables **VoF**) cada una de ellas es contradictoria con la contigua, ya que cualquiera sería deducible si se demostrara que la anterior es indeducible, y en ese caso la siguiente sería Falsa.

Entonces si ("Esta P es I") es indeducible, lo cierto es
solamente ("Esta P es I" es indeducible),
y no "Esta P es I".

Creer que si una es Verdadera implica que lo sea la otra puesto que es la misma es un error, como lo muestra el hecho que si una es deducible lo que se puede afirmar de la otra es justamente lo contrario.

8.2 - De otro modo, comparemos con sentencias que parecen tener una estructura similar a la que nos ocupa.

Consideremos las tres sentencias siguientes:

1ª. Esta frase tiene cinco palabras
2ª. Esto fue impreso con tinta negra
3ª. Esta proposición es indeducible

Si aceptamos que la primera tiene cinco palabras, la segunda fue impresa con tinta negra y la tercera es indeducible, entonces extraemos la conclusión aparentemente obvia y evidente que las tres son verdaderas.

Este simple silogismo es el que aplica Gödel en el párrafo antes citado [1;59] fuera del sistema formal y ajeno a cualquier formalización estricta.

Veremos que en el tercer caso la conclusión ha sido erróneamente extraída.

A efectos de identificarlos, nombremos los términos distinguiendo su posición en el silogismo:

Hipótesis 1 - A1 dice que A2 tiene la propiedad P
Hipótesis 2 - A3 tiene la propiedad Q
Tesis - A4 es verdadera

Cuando Q implica P, A3 = A2 y A4 = A1 la conclusión es válida.

El silogismo entonces dice:

H 1 - A1 dice que A2 tiene la propiedad P
H 2 - A2 tiene la propiedad P
T - A1 es verdadera

Para la primera sentencia, si llamamos:

A2 = Esta frase tiene cinco palabras

H1	A1 = A2 tiene cinco palabras
H2	A2 tiene cinco palabras
T	A1 es Verdadera
T'	(A2 tiene 5 palabras) es Verdadera
T''	("Esta frase tiene 5 pal." tiene 5 pal.) es Verdadera
Este silogismo no dice aún que A2 sea Verdadera	

Si podemos agregar esta equivalencia:
Esta frase = "Esta frase tiene cinco palabras"
y sustituimos en T'', obtenemos:
(Esta frase tiene cinco palabras) es Verdadera
entonces **A2 es Verdadera**.

Para la tercera sentencia, llamando
G2 = Esta proposición es Indeducible

H1	G1 = G2 es Indeducible
H2	G2 es Indeducible
T	G1 es Verdadera
T'	(G2 es Indeducible) es Verdadera
T''	("Esta proposición es Indeducible" es Indeducible) es Verdadera
	Este silogismo no dice que G2 sea Verdadera

No podemos agregar equivalencias similares al caso anterior porque:

Esta Proposición	Esta Proposición es Indeducible	≠
Si ésta es deducible y por lo tanto Verdadera,	implica esta otra Falsa	

"Esta Proposición es Indeducible" es Indeducible	Esta Proposición es Indeducible	≠
Gödel demuestra ésta, luego	esta otra es indemostrable	

No podemos entonces concluir que G2 sea Verdadera.

8.3 - El silogismo que expresa Gödel [1;59], es literalmente, con **G = [R(q);q]** el siguiente:
H1 G dice que G es Indeducible
H2 G es Indeducible
T G es Verdadera

La conclusión se refiere a alguna de las dos G de H1, y son diferentes. Son diferentes porque, como diría Gödel [1;173] la primera G está en un metalenguaje respecto a la segunda; y, lo que es decisivo, porque ambas son contradictorias, como lo muestra el hecho que si la segunda es deducible y por lo tanto Verdadera, entonces la primera es Falsa.

La conclusión se refiere a la primera G de H1 y no a la segunda. Es Verdadera la afirmación "G es Indeducible", pero no la proposición G citada en ella. (Numeremos G1 y G2 las dos G diferentes y estaremos en el caso recién analizado).

8.4 – Los diversos análisis muestran entonces que el silogismo en apariencia obvio que realiza Gödel para concluir que la citada proposición es verdadera no es correcto, la proposición no es verdadera (tampoco es falsa).

La recurrencia, disimulando el sujeto preciso a que nos referimos, nos hizo creer que era verdadera una sentencia de la cual no podemos en absoluto afirmar tal cosa.

Al no ser verdadera la sentencia que afirma su indeducibilidad, desaparece la extraña sorpresa del Teorema VI de Incompletitud.

Independientemente del aspecto formal de la demostración, es conceptualmente muy diferente demostrar la incompletitud de un sistema que no puede decidir la validez de una proposición verdadera, a lograr construir en ese sistema una sentencia que no tiene sentido ni es verdadera ni falsa y que, por lo tanto, a priori ni ella ni su negación pueden ser deducidas en el sistema.

Desde el momento en que queda de manifiesto que algo que parece una sentencia o bien no lo es o por lo menos no es calificable de verdadera o falsa, no podemos esperar en un sistema útil otra cosa que esa indecidibilidad, y la demostración de ello es una consecuencia de la coherencia y adecuación de ese sistema.

9 - CONCLUSIONES

9.1 - Existen en lenguaje natural sentencias y/o seudo-sentencias no universalmente calificables de Verdaderas o Falsas. Si ese carácter no es evidente, deberemos recurrir a herramientas adecuadas para ponerlo de manifiesto.

9.2 - La paradoja del mentiroso aparece si cometemos el error de tratar la afirmación de Epiménides como calificable de Verdadera o Falsa, cuando en realidad no lo es. En los términos del ejemplo manejado en (6.3), si la proposición fuera "Verdadera o Falsa" el botín estaría siempre en el cofre Nº 2, en flagrante contradicción con la realidad.

9.3 - Gödel afirma, previo a su teorema de incompletitud, que una sentencia indecidible es verdadera, lo cual le confiere especial sentido al hecho de ser indecidible. El análisis muestra que dicha sentencia no es Verdadera.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] - Kurt Gödel, Obras completas
Alianza Universidad 286. Alianza Editorial S.A.
Madrid, 1981

[2] - Rudolf Carnap, The logical sintax of language
Routledge & Kegan Paul Ltd.
London, 1937

[3] - Rudolf Carnap , Ciencia y metafísica ante el análisis lógico del lenguaje
Ediciones de La Casa del Estudiante
Montevideo, 1976

[4] - Paul Watzlawick, Cambio
Biblioteca de Psicología 35. Editorial Herder
Barcelona, 1985

[5] - R. Montague, English as a formal language
Yale University Press
Yale, 1974

[6] - D. Davidson, Truth and meaning
Philosophical Logic
Dordrecht, 1959

[7] - Helios Pazos, Determinismo y causalidad
Pettirossi Hnos.
Montevideo, 1983

Referencias [obra; pág.]